Retour oral d'analyse 2023 - Brian Flanagan

Couplage : 204/241, j'ai choisi la 241 (suites et séries de fonctions)
Développements : Théorème d'Abel angulaire et Tauber faible, Une classe de séries lacunaires continues et nulle part dérivables.
Développement choisi : Séries lacunaires, fait en 15'00 environ.
Note : 20

Questions sur le développement :

montrer comment appliquer le résultat à la fonction de Weierstrass (que j'avais donnée en exemple dans mon plan)

Questions sur le plan :

— Donner l'idée de la preuve que les $(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(0, 2\pi)$.
— Énoncer le théorème de Glivenko-Cantelli "pour la culture" (j'avais écrit dans mon plan que c'était une application du petit théorème de Dini, sans l'énoncer).
— Donner un exemple d'une suite de fonctions qui contredit les hypothèses des théorèmes de Dini (suite non croissante qui CVS mais pas CVU, suite croissante qui CVS mais pas sur un compact et non CVU)
— Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ peut-elle être limite uniforme de polynômes ? (non)
— Comment se démontre l'application du théorème de Weierstrass qui était dans mon plan ? L'application énonçait qu'une suite de VA (X_n) à valeurs dans $[0, 1]$ converge en loi vers une probabilité μ si et seulement si les suites de ses moments $(\mathbb{E}[X_n^k])_n$ convergent vers les moments de μ. On utilise le fait qu'une fonction continue sur $[0, 1]$ est nulle si et seulement si son intégrale contre les x^n est nulle pour tout n (ce qui découle de Weierstrass).
— Que dire d'une série entière sur le bord de son disque de convergence, outre le résultat de continuité d'Abel angulaire ? J'ai d'abord dit qu'il existait au moins un point singulier sur le bord du disque par Borel-Lebesgue, puis ils attendaient quelques exemples de comportements différents, on a regardé la série génératrice des $\frac{1}{n^2}$ et la série entière associée à $\ln(1 + x)$ et $\frac{1}{1-x}$.
— Connait-on des résultats de décroissance sur les coefficients de Fourier $(c_n(f))_n$? J'avais choisi de ne presque pas parler des coefficients de Fourier dans mon plan pour me concentrer sur les résultats de convergence des séries de Fourier, j'ai donc cité Riemann-Lebesgue et le lien entre régularité de f et décroissance en $o(\frac{1}{n^k})$ des $(c_n(f))$. On m'a demandé s'il y avait réciproque, j'ai dit que c'était le cas pour la transformation de Fourier mais que je ne connaissais pas de tel résultat pour les séries de Fourier. J'ai dit qu'on avait la réciproque sur la série de Fourier (décroissance des coefficients de Fourier implique régularité de la série de Fourier) en disant que ça n'impliquait à priori rien sur la fonction. Le jury n'a pas insisté, je pense que j'aurais du essayer de donner des contre-exemples.
— Donner l'idée de la peruve de Banach-Steinhaus (je l'avais cité dans mon plan).

Exercices :

— Donner un équivalent de la série des x^{n^2} lorsque x tend vers 1, après avoir donné le rayon de convergence. Je connaissais le truc, c'est une comparaison série intégrale que j'ai un peu laborieusement mise en oeuvre.
— Est-ce que la fonction qui à f associe ses coefficients de Fourier est surjective de L^2 dans les suites tendant vers 0 en l'infini ? Là encore je connaissais le truc, j'ai répondu que non et qu'on le démontrait par le théorème d'isomorphisme de Banach avec le noyau de Dirichlet du tac au tac.

— Que dire d'une suite de fonctions L^2 bornée ? dans L^1 ? J'ai cité Riesz pour dire qu'on n'avait pas de sous-suite convergente à priori. On a parlé de convergence faible et faible-* (c'est le jury qui a dit les mots convergence faible le premier), j'ai cité Banach-Alaoglu en disant qu'il s'appliquait bien à L^2 qui est réflexif en tant que Hilbert et puis au dual de L^1 mais que c'était plus difficile, ça a eu l'air de les satisfaire. Le jury m'a ensuite demandé à quoi ressemblait la limite faible dans L^1, je n'ai pas su répondre et on s'est arrêté là-dessus.

Jury :

Assez neutre, l'un était tout de même assez sympathique et encourageant, il a sourit en voyant que je connaissais très bien le coup de la surjectivité des coefficients de Fourier.

Disposition :

Un tableau à craie et un tableau à feutre, au total ça fait un très grand tableau masi on ne peut pas se contenter du tableau à craie pour le développement.