106

Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

Dans la suite, E désignera un k-espace vectoriel de dimension finie.

I - Le groupe linéaire

1) Générateurs du groupe linéaire

Def 1 : Le groupe linéaire $GL(E)$ est l'ensemble des applications linéaires bijectives de E dans E.

Def 2 : Le groupe des matrices inversibles de taille $n\times n$ noté $GL_n(k)$ est isomorphe à $GL(E)$ par la donnée d'une base de E.

Ex 3 : Les symétries de E sont des éléments de $GL(E)$. On dira qu'une ~~...~~ symétrie est une réflexion lorsque $\mathrm{Ker}(s-Id_E)$ est un hyperplan et un ~~...~~ retournement lorsque $\mathrm{Ker}(s+Id_E)$ est un plan.

Prop 4 : Soit $u\in$ ~~GL~~$\mathcal{L}(E)$. Alors il est équivalent de dire
(i) $u\in GL(E)$ (ii) $\mathrm{Ker}\,u=\{0\}$ (iii) $\det u\neq 0$ (iv) $\mathrm{Im}(u)=E$.

Ex 5 : Ceci n'est pas vrai en dimension infinie. La dérivation sur $\mathbb{R}[X]$ est surjective mais pas injective.

Rmq 6 : $GL(E)$ agit naturellement sur E, via $\begin{cases} GL(E)\times E \longrightarrow E \\ (u,x) \longmapsto u\cdot x = u(x)\end{cases}$

~~...~~ Cette action possède deux orbites, $E\setminus\{0\}$ et $\{0\}$ et le stabilisateur d'un élément $x\in E\setminus\{0\}$ est isomorphe au groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & GL_{n-1}(k)\end{pmatrix}$

Def 7 : Le groupe spécial linéaire $SL(E)$ est le sous-groupe de $GL(E)$ des éléments de déterminant 1. Il est isomorphe au groupe $SL_n(k)$ des matrices de déterminant 1.

Def 8 : On appelle dilatation d'hyperplan H, de droite D et de rapport $\lambda\notin\{0,1\}$ un élément $u\in GL(E)$ tel que $H=\mathrm{Ker}(u-Id_E)$ et $D=\mathrm{Ker}(u-\lambda Id_E)$.

Prop 9 : Soit H un hyperplan de E et $u\in GL(E)$ tel que $u_{|H}=Id_H$. Il est équivalent de dire :
(i) u est une dilatation d'hyperplan H.
(ii) $\det u=\lambda\neq 1$
(iii) u admet une valeur propre $\lambda\neq 1$ et est diagonalisable.
(iv) $\mathrm{Im}(u-Id_E)\not\subset H$
(v) Dans une base convenable, u a pour matrice $\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda\end{pmatrix}$, avec $\lambda\in k^*\setminus\{1\}$.

Def 10 : De manière opposée, une transvection d'hyperplan H est un élément de $GL(E)$ tel que $H=\mathrm{Ker}(u-Id_E)$, $u\neq Id_E$ et $\det u=1$.

Prop 11 : Soit $H=\mathrm{Ker}\,f$ un hyperplan de E et $u\in GL(E)$ tel que $u_{|H}=Id_H$. Il est équivalent de dire :
(i) u est une transvection d'hyperplan H
(ii) u n'est pas diagonalisable
(iii) on a $D=\mathrm{Im}(u-Id_E)\subset H$
(iv) il existe $a\in H$ tel que pour tout $x\in E$, $u(x)=x+f(x)a$
(v) Dans une base convenable, u a pour matrice $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\end{pmatrix}$

D est alors appelée la droite de u.

Def 12 : On appelle matrice de dilatation une matrice de la forme $D_i(\mu)=\begin{pmatrix} I_{i-1} & & \\ & \mu & \\ & & I_{n-i}\end{pmatrix}$, $\mu\neq 0$, matrice de transvection une matrice de la forme $T_{ij}(\lambda)=I_n+\lambda E_{ij}=\begin{pmatrix}1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}$ où $i\neq j$ et $\lambda\in k$ et matrice de permutation une matrice de la forme $P_{ij}=\begin{pmatrix} I_{i-1} & & & \\ & \begin{smallmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ \vdots & & 1 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{smallmatrix} & \\ & & I_{n-j-1}\end{pmatrix}$, $i<j$.

Rmq 13 : Une transvection (~~resp~~ une dilatation) a pour matrice une matrice de ~~...~~ transvection (resp. de dilatation) dans une base convenable.

Rmq 14 : Pour tout $i<j$, on a $P_{ij}=T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)D_j(-1)$, donc une matrice de permutation est un produit de matrices de transvection et de dilatation.

Prop 15 : Multiplier une matrice $A\in\mathcal{M}_n(k)$ à gauche ou à droite par une matrice de dilatation, transvection ou permutation correspond aux opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes :

opération	$D_i(\mu)A$	$T_{ij}(\lambda)A$	$P_{ij}A$	$AD_i(\mu)$	$AT_{ij}(\lambda)$	AP_{ij}
résultat	$L_i\leftarrow\mu L_i$	$L_i\leftarrow L_i+\lambda L_j$	$L_i\leftrightarrow L_j$	$C_i\leftarrow\mu C_i$	$C_i\leftarrow C_i+\lambda C_j$	$C_i\leftrightarrow C_j$

Thm 16 : Par opérations élémentaires de transvection sur les lignes et les colonnes, on peut transformer toute matrice de $SL_n(k)$ en la matrice I_n.

Coro 17 : $SL_n(k)$ est engendré par les matrices de transvection et $GL_n(k)$ est engendré par les matrices de transvection et de dilatation.

Coro 18 : $SL(E)$ est engendré par les transvections et $GL(E)$ est engendré par les transvections et les dilatations.

Appl 19 : $GL_n(k)$ est engendré par les matrices diagonalisables si $k=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Appl 20 : ~~Puisque $\det(T_{ij}(\lambda))=1$ ...~~, il est ~~...~~ aisé de calculer le déterminant d'une matrice avec le pivot de Gauss.

2) Centres et groupe projectif

Prop 21 : Soit τ une transvection de droite D et d'hyperplan H et $u \in GL(E)$. $u\tau u^{-1}$ est une transvection de droite $u(D)$ et d'hyperplan $u(H)$.

Thm 22 : Le centre de $GL(E)$ est $Z(GL(E)) = \{\lambda Id_E \mid \lambda \in k^\times\}$ et le centre de $SL(E)$ est $Z(SL(E)) = \{\lambda Id_E \mid \lambda^n = 1\} = Z(GL(E)) \cap SL(E)$.

Def 23 : Le quotient de $GL(E)$ (resp. $SL(E)$) par son centre est appelé le groupe projectif linéaire (resp. groupe projectif spécial linéaire) et est noté $PGL(E)$ (resp. $PSL(E)$).

Rmq 24 : On définit de même les groupes $PGL_n(k)$ et $PSL_n(k)$.

Rmq 25 : Si k est algébriquement clos, alors $PGL(E) \simeq PSL(E)$.

Thm 26 : Le groupe $PSL_n(k)$ est simple, sauf dans les cas où $n=2$ et $k = \mathbb{F}_2$ ou $n=2$ et $k=\mathbb{F}_3$.

Prop 27 : Les cardinaux des groupes linéaires sur $\mathbb{F}_q$ sont les suivants :

(i) $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})$

(ii) $|SL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-2})q^{n-1}$

(iii) $|PGL_n(\mathbb{F}_q)| = |SL_n(\mathbb{F}_q)|$

(iv) $|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = |SL_n(\mathbb{F}_q)| / \mathrm{pgcd}(n, q-1)$.

Prop 28 : Le groupe $PGL(E)$ agit fidèlement sur $\mathbb{P}(E)$ par l'action induite par $GL(E)$.

Appl 29 : On a les isomorphismes suivants :

(i) $GL_2(\mathbb{F}_2) = SL_2(\mathbb{F}_2) = PSL_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$

(ii) $PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$

(iii) $PGL_2(\mathbb{F}_4) = PSL_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$

(iv) $PGL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$ et $PSL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5$

Appl 30 : Comme $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{A}_4$ ne sont pas simples, $PSL_2(\mathbb{F}_2)$ et $PSL_2(\mathbb{F}_3)$ ne sont pas simples.

3) Quelques actions de GL(E)

Proposition 31 : $GL(E)$ agit sur $Gr_m(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension m par l'action induite par l'action naturelle de $GL(E)$ sur E. Cette action est transitive et le stabilisateur d'un sev F de dimension m est isomorphe au groupe $\begin{pmatrix} GL_m(k) & \mathcal{M}_{m,n-m}(k) \\ 0 & GL_{n-m}(k) \end{pmatrix} \simeq \mathcal{M}_{m,n-m}(k) \rtimes (GL_m(k) \times GL_{n-m}(k))$

Proposition 32 : $GL_m(k) \times GL_n(k)$ agit sur $\mathcal{M}_{m,n}(k)$ via $(P,Q)\cdot A := PAQ^{-1}$. On appelle cette action l'action par équivalence, dont les orbites sont données par le rang sur $\mathcal{M}_{m,n}(k)$. Le stabilisateur de la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est isomorphe au groupe $(\mathcal{M}_{r,m-r}(k) \times \mathcal{M}_{n-r,r}(k)) \rtimes (GL_r(k) \times GL_{m-r}(k) \times GL_{n-r}(k))$

Prop 33 : $GL_n(k)$ agit sur $\mathcal{M}_n(k)$ par conjugaison, dont les orbites sont décrites par les invariants de similitude.

Prop 34 : $GL_n(k)$ agit sur $S_n(k)$ via $P\cdot A \mapsto {}^tPAP$. On appelle cette action l'action par congruence et classifier ses orbites revient à classifier les formes quadratiques sur k^n.

II - Les groupes orthogonaux

1) Le cas général

On suppose $car(k) \neq 2$

Def 32 : Si q est une forme quadratique non dégénérée de E, le groupe orthogonal associé à q et noté $O(q)$ est l'ensemble des éléments de $GL(E)$ tels que pour tout $x \in E$, $q(u(x)) = q(x)$. Le groupe est isomorphe au stabilisateur de la matrice de q dans une base quelconque pour l'action par congruence.

Prop 33 : Soit $u \in O(q)$. Alors $\det(u) \in \{\pm 1\}$.

Def 34 : On note $SO(q) = O(q) \cap SL(E)$.

Ex 35 : Soit $q : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) \longmapsto x_1^2 - x_2^2 \end{cases}$. On a $O(q) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1\sqrt{1+b^2} & b \\ \varepsilon_2 b & \varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{1+b^2} \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} \varepsilon_1,\varepsilon_2 \in \{\pm 1\} \\ b \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}$ et $SO(q) = \left\{ \begin{pmatrix} \pm ch(\varphi) & sh(\varphi) \\ sh(\varphi) & \pm ch(\varphi) \end{pmatrix} \middle| \varphi \in \mathbb{R} \right\}$.

Prop 36 : Une symétrie u est un élément de $O(q)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(u+Id_E)$ et $\mathrm{Ker}(u-Id_E)$ sont orthogonaux pour q. On dit alors que u est une symétrie ortho.

Prop 37 : Soit s une symétrie orthogonale et $u \in O(q)$. Alors $u\circ s\circ u^{-1}$ est une symétrie orthogonale et $\mathrm{Ker}(u\circ s\circ u^{-1} - Id_E) = u(\mathrm{Ker}(s - Id_E))$.

Thm 38 : (Elie-Cartan) Le groupe orthogonal $O(q)$ est engendré par les réflexions orthogonales.

Coro 39 : $SO(q)$ est engendré par les renversements orthogonaux.

2) Le cas euclidien

Def 40 : On note $O_n(\mathbb{R})$ le stabilisateur de I_n par l'action par congruence. Il est isomorphe au groupe orthogonal de toute forme quadratique définie positive.

Thm 41 : Soit $u \in O_n(\mathbb{R})$. Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice représentant u est $\begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix}$ où $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$

$p, q, r \in \mathbb{N}$ et $p+q+2r = n$

Prop 42 : Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, les éléments de $SO_2(\mathbb{R})$ ont pour matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Les éléments de $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ ont pour matrice $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et sont des symétries orthogonales.

Prop 43 : Les sous-groupes de $SO_2(\mathbb{R})$ finis sont de la forme

$$\{R_{\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in \{1, \dots, n\}\},\ n \in \mathbb{N}^\times$$

Un sous-groupe de $O_2(\mathbb{R})$ fini est soit cyclique, soit isomorphe au groupe diédral.

Prop 44 : Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, les éléments de $SO_3(\mathbb{R})$ ont pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Les éléments de $O_3(\mathbb{R}) \setminus SO_3(\mathbb{R})$ ont pour matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ dans une base adaptée.

III - Un peu de topologie

1) Le groupe linéaire $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Prop 45 : Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ ne possède pas de groupe arbitrairement petits i.e. il existe un voisinage V de I_n dans $GL_n(\mathbb{K})$ tq : $\forall G < GL_n(\mathbb{K})$, $G \cap V = \{I_n\}$.

Prop 46 : $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Appl 47 : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ où χ_M désigne le polynôme caractéristique de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Prop 48 : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe, mais pas $GL_n(\mathbb{R})$.

DVP 1

Prop 49 : Soit $G < GL_n(\mathbb{R})$ fermé. L'ensemble $\mathfrak{g} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R}, e^{tX} \in G\}$ est un espace vectoriel.

Thm 50 : (Cartan et Von Neumann) Tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 51 : $SL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ sont des sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$.

Prop 53 : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe

2) Décomposition polaire

Prop 54 : $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Ex 55 : $O(q)$ n'est pas compact en général, par exemple pour $q : (x,y) \mapsto 2xy$ $O(q)$ n'est pas borné.

Thm 56 : (décomposition polaire) La multiplication matricielle induit un homéomorphisme $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\simeq} GL_n(\mathbb{R})$

Appl 57 : Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est le groupe $O_n(\mathbb{R})$ lui-même.

DVP 2

Appl 58 : Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tel que $p+q = n$. On note $O(p,q)$ le groupe orthogonal associé à la forme quadratique :

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$$

On dispose d'un homéomorphisme $O(p,q) \simeq O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{pq}$

Coro 59 : $O_{(p,q)}(\mathbb{R})$ est compact ssi $pq = 0$.

Coro 60 : Si $pq \neq 0$, alors $O_{(p,q)}(\mathbb{R})$ admet quatre composantes connexes.