151

Dimension d'un espace vectoriel. Rang. Exemples et Applications

Dans la suite, E désignera un espace vectoriel sur un corps K.

I - Dimension d'un espace vectoriel

1) Familles libres et génératrices

Def 1 : Une famille de vecteurs $(x_1, \to x_n)$ de E est dite génératrice si : $\forall x \in E$, $\exists \lambda_1, \to \lambda_n \in K$, $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$.

Ex 2 : Dans K^2, $((1,0),(0,1))$ et $((1,1),(1,-1))$ sont génératrices.

Def 3 : E est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire il est dit de dim infinie.

Ex 4 : K^n est de dimension finie, mais pas $K[X]$.

Def 5 : Une famille de vecteurs $(x_1, \to x_n)$ de E est dite libre si

$$\forall \lambda_1, \to \lambda_n \in K, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

La famille est dite liée si elle n'est pas libre.

Ex 6 : Dans $\mathbb{R}^3$, $((1,2,1),(-1,3,1),(-1,13,5))$ est liée

Def 7 : Une base de E est une famille à la fois libre et génératrice.

Prop 8 : Une famille $(e_1, \to e_n)$ est une base de E ssi

$$\forall x \in E, \exists ! (\lambda_1, \to \lambda_n) \in K^n, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Ex 9 : $((\delta_{ij})_{1 \le j \le n})_{1 \le i \le n}$ est appelée la base canonique de K^n, où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

$(1, X, X^2, \to X^n)$ est la base (canonique) de $K_n[X]$.

Prop 10 :
(i) Toute famille contenant une famille génératrice l'est.
(ii) Toute sous-famille d'une famille libre l'est.
(iii) Toute famille contenant une famille liée l'est.
(iv) Toute famille contenant $\{0\}$ est liée.

2) Bases d'un espace vectoriel de dimension finie

Dans la suite, E sera supposé de dimension finie.

Thm 11 : On suppose $E \neq \{0\}$. Soit G une famille génératrice et $L \subset G$ une famille libre. Il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $L \subset \mathcal{B} \subset G$

Coro 12 : Si $E \neq \{0\}$,
(i) De toute famille génératrice on peut extraire une base.
(ii) Toute famille libre peut être complétée en une base.

Appl 13 : Soit F un sev de E. Il existe un supplémentaire de F dans E, i.e. il existe un sev G de E tel que $E = F \oplus G$.

Thm 14 : Si E est engendré par n éléments, alors toute famille à plus de $(n+1)$ éléments est liée

Coro 15 : Toutes les bases de E ont même cardinal. Le nombre est appelé dimension de E et noté $\dim(E)$.

Coro 16 :
(i) Toute famille de plus de $\dim(E)+1$ éléments est liée.
(ii) Une famille de moins de $\dim(E)-1$ éléments n'est pas génératrice.

+ Coro : Helly et Carathéodory + DVP 1

Prop 17 : Soient $E_1, \to E_p$ des K-ev de dimension finie. Alors $E := E_1 \times \dots \times E_p$ est de dimension finie et $\dim(E) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$

Ex 18 : K^n est de dimension n.

Prop 19 : Soit $\mathcal{B}$ une famille de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes
(i) $\mathcal{B}$ est une base de E,
(ii) $\mathcal{B}$ est une famille génératrice à n éléments,
(iii) $\mathcal{B}$ est une famille libre à n éléments.

Appl 20 : Soient $P_0, \to P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degrés respectifs $0, 1, \to n$. La famille $(P_0, \to P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Prop 21 : Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \le \dim(E)$ et : $\dim F = \dim E$ ssi $F = E$.

Prop 22 : Soient $E_1, \to E_p$ des sev de E. Alors $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ ssi
(i) $E = E_1 + \dots + E_p$ et (ii) $\dim E = \dim E_1 + \dots + \dim E_p$.

Prop 22' : Soient $E_1, \to E_p$ des sev de E. Alors $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ ssi pour toutes bases $\mathcal{B}_1, \to \mathcal{B}_p$ de $E_1, \to E_p$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E

+ Thm : caractérisation des endo diago

+ Thm : th. spectral.

II – Applications linéaires en dimension finie

Dans la suite, F désigne un espace vectoriel de dimension finie.

1) Bases et applications linéaires

Def 23 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle rang de f la dimension de son image, que l'on note $rg(f) := \dim(\mathrm{Im} f)$.

Prop 24 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de E.
(i) Si f est injective et $(x_i)_{i\in I}$ est libre, alors $(f(x_i))_{i\in I}$ est libre.
(ii) Si f est surjective et $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice de E, alors $(f(x_i))_{i\in I}$ est génératrice de F.

Thm 25 : Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.

Appl 26 : Soient $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $b_1, \dots, b_p \in \mathbb{K}$. Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ appelé polynôme interpolateur de Lagrange des $a_1, \dots, a_p$ tel que : $\forall 1 \leq i \leq p,\ P(a_i) = b_i$.

Thm 27 : (du rang) Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a :

$$\dim E = rg f + \dim(\mathrm{Ker} f)$$

Coro 28 : E et E^* sont isomorphes. C'est faux en dimension infinie, car $\mathbb{R}[X]^* \supset \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.. + Th de Riesz.

Coro 29 : (formule de Grassman) ~~Dim~~ E_1, E_2 sont deux sev de E,

$$\dim(E_1+E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$$

Appl 30 : ~~Soit C un code correcteur linéaire de longueur n, de dimension m et de distance minimale d. Alors $d \leq n+1-m$.~~

Coro 31 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que $\dim E = \dim F$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f est injective (ii) f est surjective (iii) f est bijective.

Ex 32 : Faux en dimension infinie : $D : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$ est surjective et non injective.

Def 33 : On appelle matrice d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ dans les bases $(e_1, \dots, e_n)$ de E et $(e'_1, \dots, e'_m)$ de F la matrice $\mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_n),(e'_1,\dots,e'_m)} = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ où pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i$.

Prop 34 : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E et F. L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E,F) &\longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres (où $m = \dim F$ et $n = \dim E$).

Coro 35 : $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

+ Appl : existence des polynômes annulateurs.
+ Contre-ex : dérivation dans $\mathbb{R}[X]$

2) Rang d'une matrice.

Def 36 :
1. Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On appelle rang de $\mathcal{F}$ la dimension du sev engendré par $\mathcal{F}$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, de colonnes $A_1, \dots, A_n$. On appelle rang de A et on note $rg(A)$ le rang de la famille $(A_1, \dots, A_n)$ dans $\mathbb{K}^p$.

Prop 37 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, soit $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) une base de E (resp. de F), et $M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. On a : $rg(f) = rg(M)$.

Prop 38 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, soient $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$) deux bases de E (resp. de F), notons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(f)$, et $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(Id_E)$ et $P_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(Id_F)$. On a :

$$M' = P_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}^{-1} M P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

~~Coro 39 : Deux matrices semblables ont même rang.~~

Thm 38 : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de rang $r \in \mathbb{N}$. A est équivalente à la matrice $J_r := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Coro 40 : Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont le même rang.

Coro 41 : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors $rg(A) = rg({}^tA)$.

Appl 42 : Si $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$, alors toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est somme de deux matrices inversibles.

III - Extensions finies d'un corps.

Def 43: Un corps L est une extension de K si $K \subset L$. L possède alors une structure de K-ev. Si L est un K-ev de dimension finie, on dit alors que L est une extension finie de K et on note $[L:K]$ sa dimension, appelée degré de L sur K.

Prop 44: Soit $K' \supset K$ une extension finie de K et $L \supset K'$ une extension finie de K'. Alors $L \supset K$ est une extension finie de K et si $(e_i)_{1\leq i\leq [L:K']}$ et $(f_j)_{1\leq j\leq [K':K]}$ sont des bases de L sur K' et de K' sur K, alors $(e_i f_j)_{\substack{1\leq i\leq [L:K'] \\ 1\leq j\leq [K':K]}}$ est une base de L sur K.

Coro 45: Sous les mêmes hypothèses, $[L:K] = [L:K'] \times [K':K]$.

Appl 46: $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{3}) : \mathbb{Q}] = 15$.

Def 47: Soit $L \supset K$ une extension.

(i) Un élément $y \in L$ est algébrique sur K s'il existe $P \in K[X]$ non nul tel que $P(y) = 0$. Il est dit transcendant sinon.

(ii) L est algébrique sur K si tout élément de L est algébrique sur K.

Ex 48: $\sqrt{2}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$, et π est transcendant. $\mathbb{C}$ est une extension algébrique de $\mathbb{R}$.

Prop 49: Soit $L \supset K$ une extension.

(i) Soit K' une K-algèbre de dimension finie incluse dans L. Alors K' est une extension finie de K (i.e. c'est un corps).

(ii) Toute extension finie de K incluse dans L est algébrique sur K.

Prop 50: Un élément $x \in L \supset K$ est algébrique sur K ssi l'algèbre $K[x]$ est une extension finie de K. Dans ce cas, l'ensemble $\{P \in K[X] \mid P(x) = 0\}$ est un idéal non nul de $K[X]$ engendré par un unique polynôme unitaire π_x appelé le polynôme minimal de x et la famille $(x^i)_{0\leq i\leq \deg \pi_x - 1}$ est une base de $K[x]$.

Ex 51: $\sqrt[n]{2}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$, de polynôme minimal $X^n - 2$.

Prop 52: Soit $L \supset K$ une extension et $x_1, \ldots, x_n \in L$. L'algèbre $K[x_1, \ldots, x_n]$ est une extension finie de K ssi $x_1, \ldots, x_n$ sont algébriques sur K.

Coro 53: Soit $L \supset K$ une extension et $L \supset M \supset K$ une extension algébrique. Si $x \in L$ est algébrique sur M, alors x est algébrique sur K.

Coro 54: Soit $L \supset K$ une extension. L'ensemble $\hat{K}$ des éléments de L algébriques sur K est une extension de K.

Ex 55: L'ensemble des nombres algébriques est un corps.

DVP2

Prop 56: Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ premiers deux à deux et sans facteurs carrés. Alors $K_n := \mathbb{Q}[\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}]$ est une extension de $\mathbb{Q}$ de degré 2^n.

Coro 57: Si $n > 1$, alors $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ est irrationnel.