204

Connexité : Exemples et applications.

I- Espaces connexes : premières définitions et propriétés.

1) Connexité et connexité par arcs. [El Haje]

Def 1 : Un espace topologique X est dit connexe si pour tout ouverts disjoints U et V de X, $X = U \cup V \Rightarrow U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.

Prop 2 : Un espace topologique X est connexe ssi l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) X n'est pas réunion de deux fermés non vides disjoints.

(ii) Les seules parties ouvertes et fermées dans X sont $\emptyset$ et X.

(iii) Toute application continue de X dans $\{0,1\}$ est constante.

Def 1' : Une partie $A \subset X$ est dite connexe si A muni de la topologie induite est connexe.

Ex 3 : $[0,1] \subset \mathbb{R}$ est connexe et $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ne l'est pas.

Def 4 : Soit X un espace topologique et $x, y \in X$. On appelle chemin dans reliant x à y une application continue $\varphi : [0,1] \to X$ telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = y$. Si $x = y$, on dira que φ est un lacet.

On a une relation $\sim$ sur X définie par $x \sim y$ ssi il existe un chemin dans X reliant x à y (équivalence). (annexe 1)

Def 5 : Un espace topologique est dit connexe par arcs si X possède une unique classe d'équivalence pour $\sim$. (annexe 2)

Prop 6 : Un espace topologique X connexe par arcs est connexe.

Prop 7 : Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ continue. Si X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.

Rmq 8 : La réciproque est fausse, puisque dans $\mathbb{R}^2$, l'espace $X = \{(0,y) \mid -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x \in]0,1]\}$ est connexe mais non connexe par arcs. (annexe 3)

Prop 9 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et $U \subset E$ un ouvert.

(i) U est connexe ssi U est connexe par arcs.

(ii) les composantes connexes de U sont ouvertes, fermées dans U et connexes par arcs.

2) Stabilité de la notion de connexité

Prop 10 : Soient $A, B \subset X$. Si A est connexe et $A \subset B \subset \bar{A}$, alors B est connexe.

Coro 11 : L'adhérence d'une partie connexe est connexe.

Prop 12 : Soit $A \subset X$ et $B \subset X$ connexe tel que $A \cap B \neq \emptyset$ et ${}^cA \cap B \neq \emptyset$. Alors $B \cap \partial A \neq \emptyset$. (passage des douanes).

Thm 13 : Soit X un espace topologique.

(i) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de X telle que : $\forall i,j \in I$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. La réunion $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

(ii) Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite de parties connexes de X telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. La réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est connexe.

Corollaire 14 : Si X et Y sont homéomorphes, alors X est connexe ssi Y est connexe.

Appl 15 : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Thm 16 : Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X et $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ l'application quotient.

(i) Si X est connexe, alors l'espace quotient $X/\mathcal{R}$ est connexe.

(ii) Si $X/\mathcal{R}$ est connexe et chaque classe d'équivalence suivant $\mathcal{R}$ est connexe, alors X est connexe.

(iii) On suppose que chaque classe d'équivalence est connexe. Si $A \subset X/\mathcal{R}$ est connexe et fermée (resp ouverte), alors $\pi^{-1}(A)$ est connexe dans X.

Thm 17 : Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques non-vides. L'espace produit $\prod_{i \in I} X_i$ est connexe ssi chacun des X_i l'est.

Appl 18 : $\mathbb{R}^d$ est connexe pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.

3) Connexes de $\mathbb{R}$ et composantes connexes.

Thm 19 : Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est connexe ssi c'est un intervalle.

Coro 20 : (théorème des valeurs intermédiaires) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Alors :

$f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Appl 21 : Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair admet une racine réelle.

Def 22 : Pour $x, y \in X$, on note $x \mathcal{R} y$ ssi x et y sont contenus dans un connexe de X. Ceci définit une relation d'équivalence sur X dont les classes sont appelées les composantes connexes de X.

Prop 23 : Soit $x \in X$. La composante connexe de x est la réunion des connexes contenant x.

Prop 24 : Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion disjointe d'intervalles ouverts.

Appl 25 : La tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles ouverts.

II - Calcul différentiel sur un connexe. [Rouvière] + [ElAm]

Prop 26 : Soient E et F deux evn et $f : U \to F$ différentiable sur un ouvert connexe $U \subset E$. Alors f est constante sur U ssi $df = 0$ sur U.

Appl 27 : $\forall x > 0$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.

Thm 28 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue et k-lipschitzienne par rapport à y. Le système différentiel

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = x_0 \qquad + \text{EDP}$$

avec $(t_0, x_0) \in U$ donné admet au plus une solution définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0.

DVP 1

Thm 29 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f est un $\mathcal{C}^1$ - difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.
(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $d_x f$ est inversible et $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$

Prop 30 : Soit $k > 0$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et k-dilatante. Alors f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.

Prop 31 : Une fonction localement constante sur un connexe est constante.

III - Fonctions holomorphes et simple connexité [Tauvel]

1) Homotopie et simple connexité dans $\mathbb{C}$.

Def 32 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et γ_1, γ_2 deux chemins dans U. Une déformation de γ_1 à γ_2 est une application continue $\delta : [0,1]^2 \to U$ telle que $\delta(t,0) = \gamma_1(t)$ et $\delta(t,1) = \gamma_2(t)$, $\forall t \in [0,1]$.
Deux chemins γ_1, γ_2 dans U de mêmes extrémités sont dits homotopes dans U s'il existe une déformation δ de γ_1 à γ_2 telle que pour tout $s \in [0,1]$, $\delta(0,s) = \gamma_1(0)$ et $\delta(1,s) = \gamma_2(1)$.
Deux lacets γ_1, γ_2 dans U sont dits homotopes dans U s'il existe ~~sont comme chemins par une déformation~~ vérifiant $\delta(0,s) = \delta(1,s), \forall s \in [0,1]$ dans U une déformation de γ_1 à γ_2
(annexe 4)

Ex 33 : Soit $U = \mathbb{C}^*$ et $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$. Les lacets $\gamma_1 : t \mapsto r_1 e^{2i\pi t}$ et $\gamma_2 : t \mapsto r_2 e^{2i\pi t}$ sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$.

Prop 34 : L'homotopie est une relation d'équivalence.

Def 35 : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Si tous les lacets dans U sont homotopes dans U, on dit que U est simplement connexe.

Prop 36 : Si U est étoilé en l'un de ses points, alors il est simplement connexe.

Ex 37 : $\mathbb{C}$ est simplement connexe, mais pas $\mathbb{C}^*$.

2) Intégration et homotopie.

Thm 38 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et γ_1, γ_2 des chemins (resp. des lacets) homotopes dans U. Si f est holomorphe dans U, alors $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$.
à définir

Prop 39 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, f holomorphe sur U et γ un chemin dans U.
(i) Il existe des primitives de f le long de γ, et la différence de deux telles primitives est constante.
(ii) Si γ est un chemin dans U de classe $\mathcal{C}^1$ et si φ est une primitive de f le long de γ, on a : $\int_\gamma f(z)dz = \varphi(1) - \varphi(0)$.

Def 40 : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur U. Si γ est un chemin dans U, on définit $\int_\gamma f(z)dz = \varphi(1) - \varphi(0)$ où φ est une primitive de f le long de γ.

Prop 41 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, γ un lacet dans U et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\,\gamma$. On note $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$. On a $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

Coro 42 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ dont les composantes connexes sont simplement connexes. Si f est holomorphe sur U, alors f admet des primitives dans U. Si γ est un lacet dans U, on a $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ si $z \notin U$.

Rmq 43 : $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe.

Thm 44 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur U. Soit γ un lacet dans U homotope à un point dans U. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\,\gamma$,

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \mathrm{Ind}_\gamma(z)\, f^{(m)}(z) = \int_\gamma \frac{m!}{2i\pi} \cdot \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{m+1}}\, d\xi$$

IV – Groupes topologiques et connexité. [H262, 1]

Dans cette partie $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Def 45 : Un groupe topologique est un groupe G muni d'une topologie pour laquelle les applications de produit et de passage à l'inverse sont continues.

Prop 46 : Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe topologique. + Prop : $\mathcal{C}(K, \mathbb{C}^*)$

Coro 47 : $SL_n(\mathbb{K})$, $O_n(\mathbb{K})$, $SO_n(\mathbb{K})$ sont des groupes topologiques.

Prop 48 : Soit G un groupe topologique et $H < G$. Si H est ouvert, alors H est fermé. Si l'on suppose G séparé on a les équivalences suivantes :
(i) H est ouvert
(ii) $e \in \mathring{H}$
(iii) l'espace quotient G/H est discret. (pas sûr)

Prop 49 : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Def 50 : On appelle composante neutre d'un groupe topologique la composante connexe de l'élément neutre.

Prop 51 : Soit G un groupe topologique et G_0 sa composante neutre.
(i) G_0 est un sous-groupe fermé et distingué dans G.
(ii) la composante connexe de $g \in G$ est gG_0
(iii) Si H est un sous-groupe ouvert inclus dans G_0, alors $H = G_0$.
(iv) G_0 est ouvert ssi le neutre admet un voisinage connexe.

Prop 52 : le groupe $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$ est la composante connexe neutre de $GL_n(\mathbb{R})$ (qui n'est donc pas connexe).

Prop 53 : La composante connexe neutre de $O_n(\mathbb{R})$ est $SO_n(\mathbb{R})$.

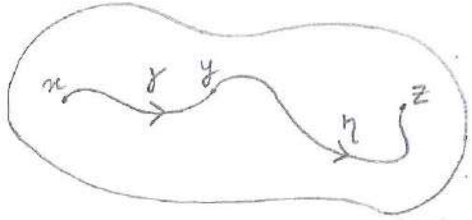
~~App 54 : $SO_n(\mathbb{R})$ est simple pour $n \geq 3$ impair.~~

Prop 55 : Soit G un groupe topologique de composante neutre G_0. Soit $H < G$. On suppose que $G/G_0 = \{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m\}$ est fini d'ordre m. (pas sûr)
(i) G_0 est ouvert dans G.
(ii) Les classes $g_i G_0$ sont les composantes connexes de G.
(iii) Soit $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. Le nombre de composantes connexes de G/H est $|\pi(G)/\pi(G_0)|$.
(iv) Soit $\pi_0 : G \to G/G_0$ la projection canonique. Le nombre de composantes connexes de G/H est $|\pi_0(G)/\pi_0(H)|$.
(v) Le nombre de composantes connexes de G/H divise m.
(vi) L'indice $m/k = [\pi_0(H) : \pi_0(G)]$ est égal au nombre de classes modulo G_0 intersectées par H.

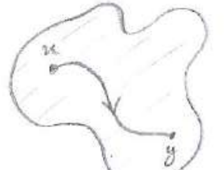
DVP 2

Thm 56 : existence d'un logarithme.

Thm 57 : Brouwer en dim 2.



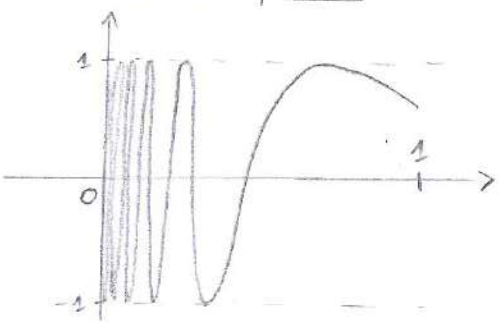
annexe 1 - transitivité de $\sim$



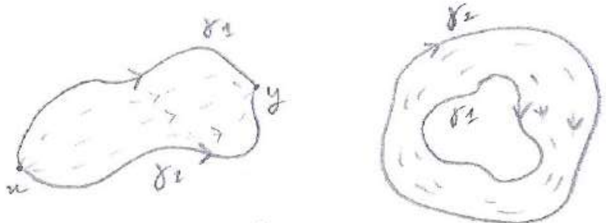
espace connexe par arcs

espace non connexe par arcs

annexe 2 - illustration de la connexité par arcs



annexe 3 - graphe de $x \longmapsto \sin(1/x)$



annexe 4 - illustration des relations d'homotopie de chemins et de lacets.