205 Espaces complets. Exemples et applications.

I – Généralités sur les espaces métriques complets

Dans la suite, (X,d) désignera un espace métrique.

1) Suites de Cauchy et complétude

Def 1: Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p,q \geq N,\ d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Prop 2: Toute suite convergente dans X est de Cauchy.

Rmq 3: La réciproque est fausse. $\left(x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ mais n'y est pas convergente (pour la métrique usuelle).

Prop 4: Toute suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence est convergente.

Def 5: On dit que (X,d) est complet si toute suite de Cauchy y est convergente. Une partie $A \subset X$ est dite complète si elle l'est munie de la distance induite.

Ex 6: $\mathbb{R}$ muni de la métrique usuelle est complet, mais pas $\mathbb{Q}$.

2) Stabilité de la notion de complétude

Prop 7: Soient (X,d), (Y,d') deux espaces métriques et $f : X \to Y$ un homéomorphisme. Si f est uniformément continue et si (Y,d') est complet, alors (X,d) est complet.

Coro 8: Soient d, d' deux métriques uniformément équivalentes sur X. ~~Toute suite de Cauchy~~ (X,d) est complet ssi (X,d') l'est.

Ex 9: L'équivalence topologique ne suffit pas. Si $X =]0,1]$ et $d_1(x,y) = |x-y|$ et $d_2(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$, alors d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes, mais (E,d_1) n'est pas complet et (E,d_2) l'est.

Prop 10: Soit (X_i, d_i), $1 \leq i \leq p$ une famille finie d'espaces métriques. L'espace métrique $X = X_1 \times \dots \times X_p$ est complet ssi tous les (X_i, d_i) sont complets. Ceci reste vrai pour une famille dénombrable.

Coro 11: $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{C}^p$ sont complets.

Prop 12: Une partie finie d'un espace complet est complète.

Prop 13: Soit X un ~~ensemble~~ espace topologique et (Y,d) un espace métrique complet. Munis de la distance uniforme, $B(X,Y)$ est complet et $\mathcal{C}_b(X,Y)$ est fermé dans $B(X,Y)$. + CV sur H compact

Ex 14: $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ est complet.

3) Les grands résultats de la complétude

Thm 15: Soit (X,d) un espace métrique. (X,d) est complet ssi toute suite décroissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés non vides telle que $\operatorname{diam}(F_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ est d'intersection réduite à un point.

Thm 16: Si (X,d) est complet, alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans X est dense. + Ascoli & Montel

Thm 17: Soient (X,d) et (Y,d') des espaces métriques et $A \subset X$ une partie dense. Soit $f : A \to Y$ uniformément continue. Si (Y,d') est complet, alors f se prolonge de manière unique en une application continue $\tilde{f} : X \to Y$. De plus, $\tilde{f}$ est uniformément continue.

Appl 18: La transformée de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ se prolonge de manière unique sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Thm 19: (point fixe de Picard) Soit (X,d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ contractante de rapport $k < 1$. Alors f possède un unique point fixe $x \in X$ et pour tout $x_0 \in X$, la suite $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, avec : $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x, f^n(x_0)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, f(x_0))$.

Appl 20: (Cauchy-Lipschitz) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^p$. Il existe une unique solution globale et une seule $y : I \to \mathbb{R}^p$ solution du problème de Cauchy $y' = f(t,y)$ et $y(t_0) = y_0$.

II - Espaces de Banach

Dans la suite, $(E, \|\cdot\|)$ désignera un espace vectoriel normé.

1) Définition et exemples

Def (21): ~~Soit~~ $(E, \|\cdot\|)$ est dit de Banach s'il est complet pour la distance issue de sa norme.

Ex 22: $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$ est complet, quelle que soit la norme. Pour $p \in [1, +\infty)$, l'espace des suites $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est de Banach.

Thm (23): (Riesz - Fischer) Pour tout espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$, et $p \in [1, +\infty)$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach (pour la norme $\|\cdot\|_{L^p}$).

Prop 24: Soient $(E_1, \|\cdot\|_1)$ et $(E_2, \|\cdot\|_2)$ deux espaces vectoriels normés. Si $(E_2, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ est un espace de Banach.

Thm (25): Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On a les propriétés équivalentes suivantes :

(i) $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

(ii) Toute série $\sum x_n$ de E normalement convergente est convergente dans E.

Appl 26: Soit $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ où E_2 est un Banach. Si $\|T\| < 1$, alors $Id - T$ est inversible dans $\mathcal{L}(E_1, E_2)$.

2) Les conséquences du théorème de Baire

Thm (27): (de l'application ouverte) Soient E, F deux Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. T est surjective ssi T est une application ouverte.

Coro (28) (isomorphisme de Banach) $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective ssi c'est un homéomorphisme.

DVP 1

Appl 29: Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace probabilisé. Soit $p \geq 1$ et V un sev fermé de $L^p(\mu)$ tel que $V \subset L^\infty(\mu)$. Alors V est de dimension finie.

Appl 30: Si E est de Banach, alors $GL(E, F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E, F)$.

Thm 31: Soient E, F des Banach et $f : E \to F$ linéaire. Alors $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ssi son graphe est fermé dans $E \times F$.

Thm (32): (Banach-Steinhaus) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un Banach et $(F, \|\cdot\|')$ un evn. Soit $A \subset \mathcal{L}(E, F)$. Il est équivalent de dire :

(i) A est borné dans $\mathcal{L}(E, F)$

(ii) $\forall x \in E$, $\{T(x) \mid T \in A\}$ est borné.

Appl 33: ~~Soit f un R ev de dim~~ Il existe une fonction f continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que sa série de Fourier diverge en 0.

III - Espaces de Hilbert.

Dans la suite, $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désignera un espace préhilbertien.

1) Définition et exemples

Def 34: $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est dit de Hilbert si c'est un Banach pour la norme issue de son produit scalaire. On suppose que H est un Hilbert.

Ex 35: Tout espace préhilbertien de dimension finie est de Hilbert. Si $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesurable, alors $(L^2(\mu), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$ est un Hilbert. En particulier, $\ell^2(I)$ est un Hilbert pour tout ensemble I.

Ex (36) (espace de Bergman) Si D désigne le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, alors $H^2(D) = H(D, \mathbb{C}) \cap L^2(D)$ est un espace de Hilbert pour le p.s. de $L^2(D)$.

2) Le théorème de projection et ses conséquences.

Thm (37): Soit $C \subset H$ convexe fermée non vide. Pour tout point $x \in H$, il existe un unique point $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C)$. Le point appelé projection de x sur C et noté $P_C(x)$ est caractérisé par :

$$y \in C \quad \text{et} \quad \forall z \in C, \ Re(\langle x-y, z-y \rangle) \leq 0.$$

(annexe 1)

Prop 38: Soit F un sev fermé de H. Alors $p_F \in \mathcal{L}(E,H)$ et si $x \in H$, alors $p_F(x)$ est l'unique élément $y \in E$ tel que
$$y \in F \text{ et } x-y \in F^{\perp}.$$

Coro 39: (supplémentaire orthogonal) Soit F un sev fermé de H. Alors $H = F \oplus F^{\perp}$.

Coro 40: (critère de densité) Si F est un sev de H, alors $E = \overline{F} \oplus F^{\perp}$. En particulier, $E = \overline{F}$ ssi $F^{\perp} = \{0\}$.

Appl 41: $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, où $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions réelles à support compact.

Thm 42: (de représentation de Riesz). L'application $\begin{cases} H \to H' \\ y \mapsto \langle \cdot | y \rangle \end{cases}$ est une isométrie surjective. Donc toute forme linéaire T sur E est telle qu'il existe un unique $y \in H$ tel que $T = \langle \cdot | y \rangle$. De plus $\|T\| = \|y\|$.

Appl 43: Pour tout $T \in \mathcal{L}(E)$, il existe $T^* \in \mathcal{L}(E)$ appelé adjoint de T (il est unique) tel que : $\forall x,y \in H$, $\langle Tx|y\rangle = \langle x|T^*y\rangle$. De plus, $\|T^*\| = \|T\|$.

Appl 44: (Radon-Nykodym faible) Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace mesurable et μ, ν deux mesures finies sur $(X,\mathcal{T})$ telles que $\forall A \in \mathcal{T}$, $\nu(A) \leq \mu(A)$. Il existe f mesurable telle que :
$$\forall A \in \mathcal{T},\ \nu(A) = \int_A f(x)\,d\mu(x).$$

3) Convergence faible dans un Hilbert.

Def 45: On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in H$ si $\forall y \in H$, $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n | y\rangle = \langle x|y\rangle$. On notera $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

Prop 46: Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ faiblement convergente vers $x \in H$. Alors $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \|x_n\| \geq \|x\|$. De plus, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ (fortement)

(ii) $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$

(iii) $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

DVP 2

Thm 47: (Banach-Alaoglu) Soit $(E,\|\cdot\|)$ un evn séparable et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ bornée. Alors $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergeant simplement dans $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.

Thm 48: (Banach-Alaoglu dans un Hilbert). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ bornée. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite faiblement convergente.

Appl 49: Soit J une application continue convexe et coercive (i.e. $\lim_{\|x\|\to+\infty} J(u) = +\infty$) sur H. Alors J atteint son minimum sur H.

Appl 50: Soit $C \subset H$ une partie convexe fermée bornée et non vide contenant 0. Soit $T : C \to C$ une application 1-lipschitzienne. Alors T admet un point fixe. (point fixe de Browder).