

I - Techniques élémentaires (Landon) + [Briane]

Prop 1: Si  $f \in C^0([a,b], \mathbb{K})$ , alors  $f$  admet une primitive sur  $[a,b]$  et toute primitive  $F$  de  $f$  vérifie:  $\forall x \in [a,b], F(x) = F(a) + \int_a^x f$ .

Ex 2:  $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+2\pi} \sin = \int_a^a \cos = 0$

Prop 2: Table de primitives usuelles (gamme et 1).

Prop 3: (décomposition en éléments simples) Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$  non nulle que l'on écrit  $F = \frac{P}{Q}$  sous forme réduite. Soit  $Q = Q_1^{r_1} \dots Q_p^{r_p}$  la décomposition en facteurs irréductibles de  $\mathbb{K}(X)$ . Il existe de uniques  $E_i \in \mathbb{K}(X)$ ,  $A_j \in \mathbb{K}(X)$  tq  $\deg(A_j) < \deg(Q_j)$  tel que

$$F = E + \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{Q_i} + \sum_{j=1}^p \frac{A_j}{Q_j}$$

et  $E$  est le quotient de la division euclidienne de  $P$  par  $Q$ .

Ex 5:  $x \mapsto \frac{1-x}{(x^2+x+1)^2} + \frac{2}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}$  admettra  $\frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}$  action  $\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$  forme primitive.

Thm 1: Soit  $\varphi$  un  $\mathbb{R}^2$ -difféomorphisme entre deux ouverts  $\Delta$  et  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ . Pour toute fonction  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$  bornée,  $f \circ \varphi$  est intégrable sur  $D$  si  $(f \circ \varphi) \cdot |\text{Jac} \varphi|$  est intégrable sur  $\Delta$  et dans ce cas,

$$\int_D f(x) dx = \int_{\Delta} f(\varphi(u)) |\text{Jac} \varphi(u)| du$$

Ex 7: Soit  $\varphi: ]\pi/2, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ ,  $\delta f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^+ \times ]\pi/2, \pi[} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Prop 8: (table de Briane) Soit  $R \in \mathbb{K}(X, Y)$  une fraction rationnelle à deux variables. On effectue le changement de variable suivant pour primitive en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ :

- si  $R(\sin x, \cos x) dx$  est inchangé par l'évaluation en  $\pi - x$ , on pose  $t = \sin x$
- si  $R(\sin x, \cos x) dx$  est inchangé par l'évaluation en  $\pi - x$ , on pose  $t = \cos x$
- si  $R(\sin x, \cos x) dx$  est inchangé par l'évaluation en  $\pi - x$ , on pose  $t = \tan x$

Théorème 1: (Fubini-Tonelli) Soient  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  et  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  deux espaces mesurés, de mesures  $\sigma$ -finies et  $f: (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu) \rightarrow \mathbb{R} + ]0, +\infty[$  mesurable.

(i) Les fonctions  $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  et  $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$  définies partout sont respectivement  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ -mesurables.

(ii)  $\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left( \int_Y f d\nu \right) d\mu = \int_Y \left( \int_X f d\mu \right) d\nu$

Théorème 2: (Fubini-Lebesgue) Dans le même cadre, si  $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$ , alors les intégrales suivantes sont bien définies et:

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left( \int_Y f d\nu \right) d\mu = \int_Y \left( \int_X f d\mu \right) d\nu$$

Appl 11:  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Appl 12: Le volume  $V_d$  de la boule euclidienne unité de  $\mathbb{R}^d$  est

$$V_d = \begin{cases} \frac{\pi^{d/2}}{(d/2)!} & \text{si } d \text{ est pair} \\ \frac{2^d \pi^{d/2}}{(d-1)!} & \text{si } d \text{ est impair} \end{cases}$$

Prop 13: (intégration par parties) Soit  $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . On note

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) := \int_0^x f(t) dt \text{ et } G(x) := \int_0^x g(t) dt.$$

De sorte que,  $\int_0^x f(t)g(t) dt = F(x)G(x) - \int_0^x F(t)g'(t) dt + \text{Wallis}$

Ex 14:  $x \mapsto x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$  est une primitive de  $\arctan \sin \mathbb{R}$ .

Appl 15: On définit la fonction  $\Gamma: x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  sur  $\mathbb{R}^+$ . Elle vérifie l'équation fonctionnelle:  $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

II - Méthodes de convergence (Briane)

Thm 16 (convergence dominée) Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^1(\mu)^{\mathbb{N}}$  telle que

- (i)  $f_n$  converge simplement vers une fonction  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ .
  - (ii) il existe  $g \in L^1(\mu)$  positive telle que  $\forall n \geq 1, |f_n(x)| \leq g(x)$
- Alors  $f \in L^1(\mu)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$  et même  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$



Ex 17:  $\forall x > 0, \Gamma(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m (1 - \frac{t}{m})^m t^{x-1} dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m!}{m(m+1) \dots (m+x)} - (m+x)$

Cor 18: Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions mesurables. Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X |f_n| dx < \infty$  alors les fonctions  $f_n, \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n|$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  sont  $\mu$ -intégrables.

En outre,  $\int (\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n) dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f_n dx$ .

App 19: On définit la fonction  $\zeta: s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  pour tout  $s > 1$ . On a

alors:  $\forall s > 1, \Gamma(s) \zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = \zeta(2)$

Ex 20:  $\int_0^1 \ln x dx = -1$

Thm 21: Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert non vide et  $f: I \times X \rightarrow \mathbb{K}$  tel que:

- (i)  $\forall x \in I, t \mapsto f(x, t) \in L^1(\mu)$
- (ii)  $\mu$ -p.p.  $t \in X, x \mapsto f(x, t)$  est dérivable sur  $I$ .
- (iii)  $\mu$ -p.p.  $t \in X, \forall x \in I, |\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| \leq g(t)$  où  $g \in L^1(\mu)$ .

Alors  $F: x \mapsto \int_X f(x, t) d\mu(t)$  est dérivable et dérivable sur  $I$  de dérivée

$F'(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) d\mu(t)$  DVP 2

Ex 22: La limite  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$  existe et vaut  $\frac{\pi}{2}$ .

Ex 23: La transformée d'une gaussienne est donnée par:  $\forall a > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(e^{-ax^2})(t) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-t^2/4a}$

III - Techniques avancées

1) Analyse complexe [Amin] + [Quint]

Thm 24: (de Cauchy) Soit  $f$  est une fonction holomorphe sur un ouvert  $\Omega$  et  $\Gamma$  un lacet fermé tel que  $\text{int}(\Gamma) \subset \Omega$ , alors  $\int_{\Gamma} f dz = 0$ .

Ex 25: En examinant le bord des secteurs  $\{Re^{i\theta} | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ ,  $R > 0$ , on obtient que  $\int_0^{\infty} \cos(t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\infty} \sin(t^2) dt$  (comme intégrales impropres)

Thm 26: (des résidus) Soit  $f$  méromorphe sur un ouvert  $\Omega$  et  $A$  l'ensemble de ses pôles. Soit  $\gamma$  un lacet fermé tel que  $\text{int}(\gamma) \subset \Omega$  but n'ait aucun point de  $A$ . Alors  $\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{a \in A} \text{Res}(f, a)$ .

Ex 27:  $\forall m > 2, \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^m} = \frac{\pi}{m \sin(\frac{\pi}{m})}$  et  $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{4\pi}{5} \sin(\frac{2\pi}{5})$  (exercice)

App 28: (formule des complément)  $\forall z \in \mathbb{C}, 0 < Re(z) < 1, \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

2) Transformation de Fourier [ERAM]

Def 29: Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . On définit sa transformée de Fourier  $\hat{f}$  par:  $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i \langle \xi, x \rangle} dx$

Thm 30: Si  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  et  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , alors  $\hat{f} = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{g}(\hat{f})$  où  $\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-i \langle \xi, x \rangle} dx$  ou si  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ .

App 31:  $\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2 + x^2}\right)(t) = \frac{\pi}{a} e^{-a|t|}$ ,  $\forall a > 0$ . (fonction caractéristique de la loi de Cauchy)

Thm 32: (Plancherel-Parseval) Pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , on a  $\|f\|_2^2 = (2\pi)^d \|\hat{f}\|_2^2$

App 33:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt = \pi$

IV - Méthodes numériques [Quint]

Soit  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  continue dont on souhaite calculer l'intégrale  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ .

Def 34: Si  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}^m$ , si  $n_0, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ , on définit la quadrature  $I_n(f) = \sum_{i=0}^m \alpha_i f(x_i)$ .

Def 35: le degré d'exactitude d'une famille de quadrature  $I_n$  est le plus grand entier  $r \geq 0$  tel que:  $\forall P \in \mathbb{R}_r[X], I_n(P) = I(P)$ .

Def 36: Si  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ , on définit l'écrit d'une quadrature  $I_m$  par  $E_m(f) = I(f) - I_m(f)$ .

Prop 37: On définit les quadratures des rectangles par

$$\forall m \geq 1 \quad I_m(f) = \frac{b-a}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \quad \text{où } x_k = a + \frac{2k+1}{2} \frac{b-a}{m}$$

Si  $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ , alors l'écrit de quadrature est

$$\forall m \geq 1 \quad E_m(f) = \frac{b-a}{24} \cdot \left(\frac{b-a}{m}\right)^2 f''(\xi), \quad \text{pour un certain } \xi \in ]a, b[.$$

Prop 38: On définit la quadrature des trapèzes par

$$\forall m \geq 1 \quad I_m(f) = \frac{b-a}{2m} \sum_{k=0}^{m-1} (f(x_k) + f(x_{k+1})) \quad \text{où } x_k = a + k \frac{b-a}{m}$$

Si  $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ , alors l'écrit de quadrature est

$$\forall m \geq 1 \quad E_m(f) = -\frac{b-a}{12} \cdot \left(\frac{b-a}{m}\right)^2 f''(\xi) \quad \text{où } \xi \in ]a, b[.$$

Prop 39: On définit la quadrature de ~~Cotes~~ Simpson par

$$\forall m \geq 1 \quad I_m(f) = \frac{b-a}{6m} \left( f(x_0) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} f(x_k) + 4 \sum_{k=0}^{m-1} f(x_{2k+1}) + f(x_{2m}) \right)$$

$$\text{où } x_k = a + \frac{k(b-a)}{2m}.$$

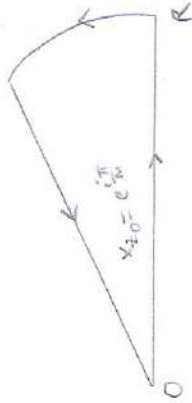
Si  $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$ , l'écrit de quadrature est

$$\forall m \geq 1 \quad E_m(f) = -\frac{b-a}{180} \cdot \left(\frac{b-a}{2m}\right)^4 f^{(4)}(\xi) \quad \text{où } \xi \in ]a, b[.$$

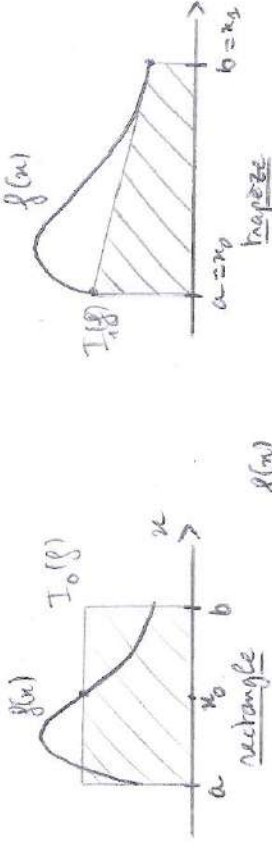
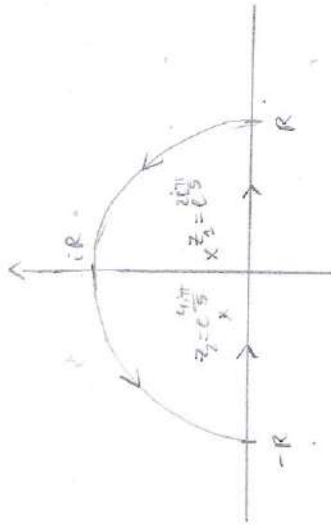
+ Monte-Carlo

$f(x)$	primitive $F(x)$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$x^{\alpha+1} / (\alpha+1)$
$1/x$	$\ln x $
$e^x$	$e^x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$1/\cos^2 x$	$\tan x$
$\frac{1}{x^2+a}, a \neq 0$	$\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

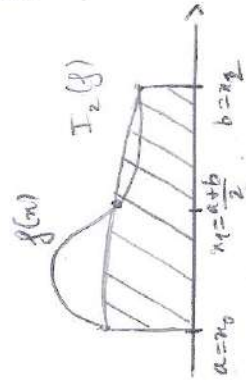
Annexe 1 -  
Table de primitives usuelles



annexe 2 - contours utilisés dans l'exemple 27.



trapèze



Annexe 3 - représentations graphiques des  
quadratures du rectangle, du trapèze et  
de Simpson.