267

Exemples d'utilisations de courbes en dimension 2 ou supérieure.

I - Propriétés des courbes paramétrées

1) Définition et régularité. [Tauvel]

Def 1 : On appelle chemin une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^d$, ou $\mathbb{C}$. Si $\gamma(0)=\gamma(1)$, on dira que γ est un lacet.
Si γ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[0,1]$, on dira que γ est un chemin (resp. un lacet) $\mathcal{C}^k$, éventuellement par morceaux.

Ex 2 : $\gamma : t \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi t}$ est un ~~lacet~~ lacet dans $\mathbb{C}$ dont l'image est $\mathbb{S}^1$.

Def 3 : Deux chemins $\mathcal{C}^k$ γ et δ sont dits $\mathcal{C}^k$-équivalents s'il existe une bijection $\mathcal{C}^k$ $\theta : [0,1] \to [0,1]$ telle que $\delta = \gamma \circ \theta$.
Si θ est croissante (resp. décroissante), γ et δ sont dites positivement (resp. négativement) équivalentes. La $\mathcal{C}^k$-équivalence est une relation d'équivalence.

Def 4 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et γ_1, γ_2 des chemins dans U. Une déformation de γ_1 à γ_2 est une application continue $\theta : [0,1]^2 \to U$ telle que
$$\forall t \in [0,1],\ \delta(t,0) = \gamma_1(t),\ \delta(t,1) = \gamma_2(t).$$
Deux chemins de mêmes extrémités a et b sont dits homotopes dans U s'il existe une déformation θ de γ_1 à γ_2 tq $\delta(0,s)=a$ et $\delta(1,s)=b$, $\forall s \in [0,1]$. Deux lacets sont dits homotopes dans U s'il existe une déformation de γ_1 à γ_2 tq $\delta(0,s) = \delta(1,s)$, $\forall s \in [0,1]$. (annexe 1).

Ex 5 : $U = \mathbb{C}^*$, $r_1, r_2 > 0$ et $\gamma_1 : t \mapsto r_1 e^{2i\pi t}$, $\gamma_2 : t \mapsto r_2 e^{2i\pi t}$ sont homotopes comme lacets.

Prop 6 : L'homotopie est une relation d'équivalence.

Prop 7 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et γ_0 un arc dans U allant de a à b (resp. un lacet dans U). Soit $d = \mathrm{dist}(\mathrm{Im}\,\gamma_0, \mathbb{R}^d \setminus U)$ ($d = +\infty$ si $U = \mathbb{R}^d$)
(i) Tout chemin (resp. lacet) γ_1 dans U tq $\sup_{[0,1]} |\gamma_1 - \gamma_2| < d$ et allant de a à b est homotope à γ_0 dans U.
(ii) Il existe un chemin (resp. un lacet) affine par morceaux homotope à γ_0 (annexe 2).

2) Longueur d'une courbe [Rouv]

Def 8 : Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ un chemin. Si σ est une subdivision de $[0,1]$ par $0 = t_0 \leq \dots \leq t_m = b$, on note $L_\sigma = \sum_{j=0}^{m-1} \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|$ et on appelle longueur de γ le nombre $L(\gamma) = \sup L_\sigma$ où σ parcourt les subdivisions de $[0,1]$. (ici $\|\cdot\|$ est une norme arbitraire sur $\mathbb{R}^d$).

Prop 9 : Tout chemin de classe $\mathcal{C}^1$ est de longueur finie et dans ce cas,
$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\,dt$$

Prop 10 : Un segment de droite est un plus court chemin d'un point à un autre de $\mathbb{R}^d$.

Ex 11 : Soit γ de l'ex 2, on a $L(\gamma) = 2\pi$. + minimisat° périmètre ellipse d'aire donnée

II - Connexité par arcs.

1) Connexité versus connexité par arcs [El Haye]

Def 12 : Un espace topologique X est dit connexe par arcs si X possède une unique classe d'équivalence pour la relation "être relié par un chemin dans X". (annexe 3)

Prop 13 : Un espace topologique X connexe par arcs est connexe.

Rmq 14 : La réciproque est fausse, dans $\mathbb{R}^2$ l'espace $X = \{(0,y) \mid -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid 0 < x \leq 1\}$ est connexe mais pas connexe par arcs (annexe 4)

Prop 15 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et $U \subset E$ un ouvert.
U est connexe ssi U est connexe par arcs.

2) Groupes topologiques [Nit, O2, 1]

Def 16 : Un groupe topologique est un groupe G muni d'une topologie pour laquelle les applications de produit et de passage à l'inverse sont continues.

Prop 17 : $GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe topologique, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. De plus, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il est connexe par arcs.

Coro 18 : $SL_n(\mathbb{K})$, $O_n(\mathbb{K})$ et $SO_n(\mathbb{K})$ sont des groupes topologiques. De plus, $SL_n(\mathbb{K})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.

Prop 19 : Soit G un groupe topologique connexe. Si $H < G$ et $1 \in H$, alors $H = G$.

DVPT 1

Prop 20 : Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ étoilé en 0. L'ensemble $\mathcal{C}(K, \mathbb{C}^*)$ muni du produit de fonctions et de la topologie de la CVU sur K est un groupe topologique. De plus, $\mathcal{C}(K, \mathbb{C}^*)$ est connexe par arcs.

Thm 21 : Soit $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C}^*)$. Il existe $g \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ telle que $f = e^g$.

Appl 22 : (Brouwer) Toute fonction continue de D dans D admet un point fixe, où D est le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$.

3) Simple connexité [Tauvel]

Def 23 : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ (et donc connexe par arcs). On dit que U est simplement connexe si tous les lacets dans U sont homotopes dans U.

Prop 24 : Si U est étoilé en un de ses points, alors il est simplement connexe. En particulier, un convexe est simplement connexe.

Ex 25 : Les boules dans $\mathbb{C}$ sont simplement connexes. Nous verrons que $\mathbb{C}^*$ ne l'est pas.

Ex 26 : Si $n \geq 2$, S^n est simplement connexe. (admis)

III - Utilisation des courbes en calcul différentiel [Rouvière]

1) Théorème des fonctions implicites.

Thm 27 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$ telle que $f(a,b) = 0$ et la matrice jacobienne $d_y f(a,b)$ est inversible.
Il existe V voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$ et W voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$ tel que $V \times W \subset U$ et $d_y f$ est inversible sur $V \times W$, et il existe une unique application $\varphi : V \to W$ telle que

$$(x \in V,\ y \in W \text{ et } f(x,y) = 0) \text{ ssi } (x \in V \text{ et } y = \varphi(x)).$$

De plus, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V (et $\mathcal{C}^k$ si f est $\mathcal{C}^k$). (annexe 5)

Appl 28 : Tracé du folium de Descartes : $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ sur $\mathbb{R}^2$

Appl 29 : La surface de $\mathbb{R}^3$ définie par $x^3 + px + q = 0$ admet comme contour apparent projeté selon x la courbe discriminante $4p^3 + 27q^2 = 0$.

2) Espaces tangents.

Def 30 : Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ ~~et a ∈ V~~. On dit que V est une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ si pour tout point $a \in V$, il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert de a, et $W \subset \mathbb{R}^d$ ouvert de 0 et un $\mathcal{C}^1$-difféo $F : U \to W$ tq

$$F(V \cap U) = \mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\} \cap F(U).$$

Ex 31 : le folium de Descartes n'est pas une sous-variété, mais l'est si l'on exclue 0.

Def 32 : Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in V$. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est tangent en a à V s'il existe une fonction dérivable $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ tq $\gamma(I) \subset V$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$ (où I est un intervalle ouvert contenant 0).

Thm 33 : Si V est une sous-variété de dimension d, si $a \in V$ alors les vecteurs tangents en a forment un sev de dim d appelé espace tangent en a à V.

Thm 34 : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f_1, \dots, f_p : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $V = \bigcap_{i=1}^{p} \{f_i = 0\}$. On suppose que si $x \in V$, les $df_i(x)$ sont indépendantes. Alors V est une sous-variété de dim $n-p$, d'espace tangent en $a \in V$ l'ensemble $\bigcap_{i=1}^{p} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = 0 \right\}$.

Appl 35 : $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $n^2 - 1$, d'espace tangent en I_n l'ensemble des matrices de trace nulle.
$O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$, d'espace tangent en I_n l'ensemble des matrices antisymétriques.

IV - Homotopie et intégration dans $\mathbb{C}$

1) Intégration le long d'un chemin

Def 36 : Soit $U \subset \mathbb{C}$ ouvert. Soit γ un chemin $\mathcal{C}^1$ dans U et f continue sur $\mathrm{Im}(\gamma)$. L'intégrale de f sur γ est $\int_\gamma f(z)\,dz := \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$.

Def 37: Soit $U \subset \mathbb{C}$ ouvert, f holomorphe sur U et γ un chemin dans U. On appelle primitive de f le long de γ toute application continue $\psi : [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $t_0 \in [0,1]$, il existe un voisinage $I_0 \subset [0,1]$ de t_0 et une primitive F_{t_0} de f définie dans un voisinage $W_0 \subset U$ de $\gamma(t_0)$ tq $\gamma(I_0) \subset W_0$ et $\psi = F_{t_0} \circ \gamma$ sur I_0.

Prop 38: Sous les mêmes hypothèses, il existe des primitives de f le long de γ et la différence de deux telles primitives est constante. De plus on a alors $\int_\gamma f(z)\,dz = \psi(1) - \psi(0)$.

Def 39: Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, f holomorphe sur U et γ un chemin de U. On définit l'intégrale de γ le long de U par $\int_\gamma f(z)\,dz = \psi(1) - \psi(0)$ où ψ est une primitive de f le long de γ.

Prop 40: Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur U.
Si f admet une primitive F dans U, pour tout chemin γ dans U, on a
$$\int_\gamma f(z)\,dz = F\circ\gamma(1) - F\circ\gamma(0)$$

2) Théorèmes de Cauchy

Def 41: Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, γ un lacet dans U et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\,\gamma$. On définit l'indice de z par rapport à γ par $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$.

Prop 42: Avec les notations précédentes, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

Thm 43: Soit $U \subset \mathbb{C}$ ouvert et γ_1, γ_2 des chemins (resp. des lacets) dans U homotopes dans U. Pour toute fonction holomorphe dans U, $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$.

Coro 44: Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ dont les composantes connexes sont simplement connexes. Si f est holomorphe sur U, alors f possède des primitives dans U.

Ex 45: $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe.

Thm 46: Soit U ouvert de $\mathbb{C}$, f holomorphe sur U et γ un lacet dans U homotope à un point de U. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{Ind}_\gamma(z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,d\xi$$

3) Théorème des résidus et prolongements culturels [Queffélec²] + [Amar]

Def 47: Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt$ si $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Prop 48: $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $\mathrm{Re}(z) > 0$, $\Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$ et Γ est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}\,z > 0\}$.

Coro 49: $1/\Gamma$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont les zéros sont simples et sont les entiers ≤ 0. Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$.

Def 50: Soit $a \in \mathbb{C}$. Si f est méromorphe sur $U \setminus \{a\}$ où U est un ouvert, on appelle résidu de f en a le coefficient en $\frac{1}{z-a}$ dans le dvp de Laurent de f en a, et on le note $\mathrm{Res}(f, a)$

Thm 51: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur $\Omega \setminus S$ où S est un ens. de Ω sans point d'accumulation. Soit $K \subset \Omega$ un compact à bords réguliers tel que $\partial K \cap S = \emptyset$. Alors $S \cap K$ est fini et
$$\int_{\partial K} f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a \in S \cap K} \mathrm{Res}(f, a)$$

DVP2

Appl 52: (formule des compléments) Si $z \in \mathbb{C}$ est tq $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, alors $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

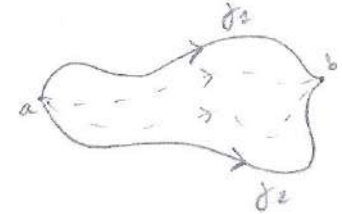
Rmq 53: La formule des compléments se prolonge sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Def 54: Si $\mathrm{Re}(z) > 1$, on note $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$, qui est une fonction holomorphe sur $\{\mathrm{Re}(z) > 1\}$.

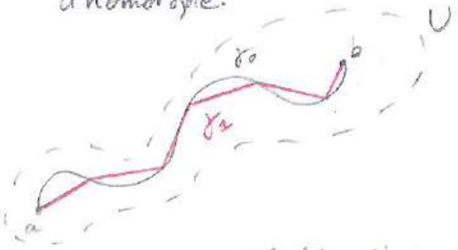
Prop 55: Si $s > 1$ alors $\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\,dt$.

Thm 56: Soit $\varepsilon > 0$. On note Γ_ε le chemin infini construit des deux demi-droites $i\varepsilon + \mathbb{R}^+$ et $-i\varepsilon + \mathbb{R}^+$ et le demi cercle $C_\varepsilon = \{|z| = \varepsilon, \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$ (annexe 8). Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $s \in \mathbb{C}$ tq $\mathrm{Re}(s) > 1$
$$\zeta(s) = \frac{e^{-i\pi s}\Gamma(1-s)}{2i\pi}\int_{\Gamma_{\varepsilon_0}} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1}\,dz.$$

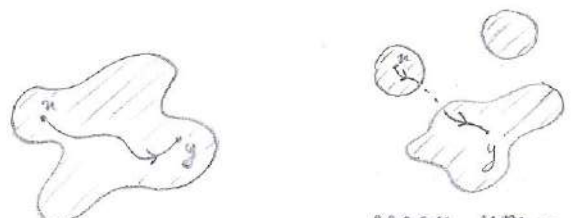
Coro 57: ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.



annexe 1 - illustration de la relation d'homotopie.



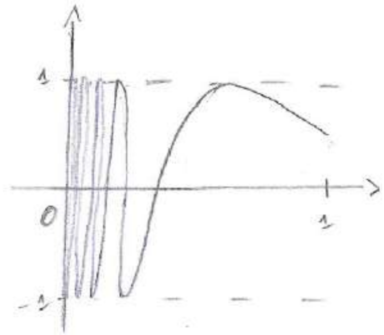
annexe 2 - rectification d'un chemin dans un ouvert.



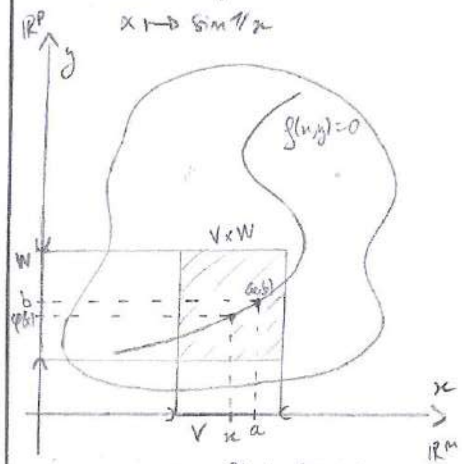
espace connexe par arcs.

espace non-connexe par arcs.

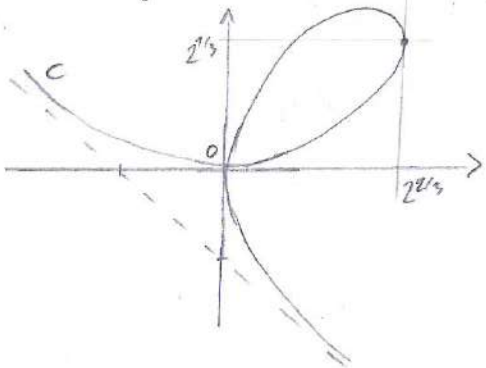
annexe 3 - illustration de la connexité par arcs



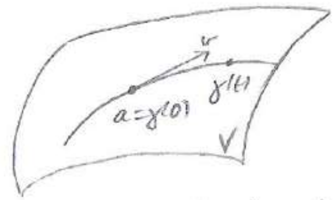
annexe 4 - graphe de $x \mapsto \sin 1/x$



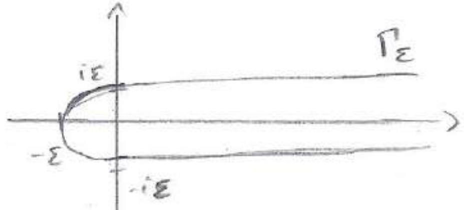
annexe 5 - illustration du thm des fonctions implicites



annexe 6 - Tracé du folium de Descartes



annexe 7 - vecteur tangent en a à V.



annexe 8 - contour de Hankel.