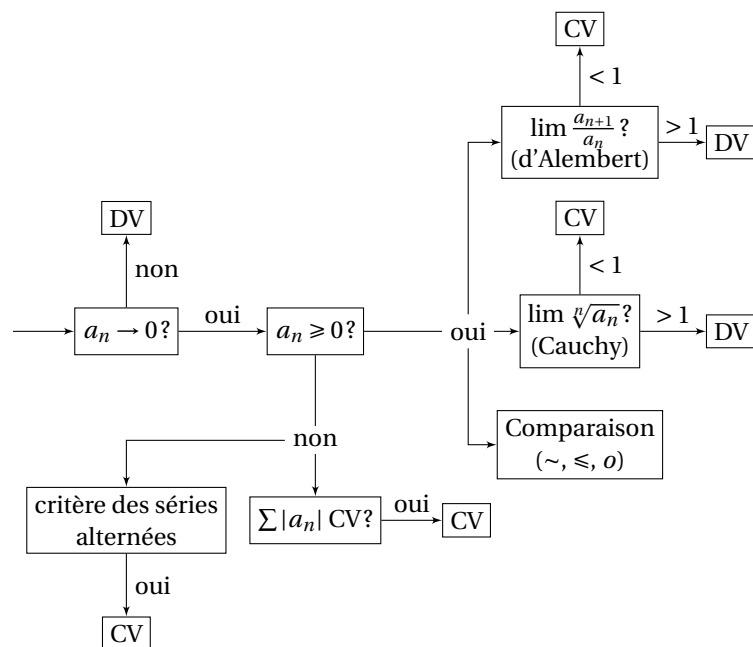


Boîte à outils : évaluer la convergence d'une série

Dans toute la suite, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignera une suite de réels quelconques. Que faire quand on nous demande de déterminer la **nature** de la série de terme général a_n , c'est-à-dire savoir si $\sum a_n$ est convergente ou divergente? Voilà un diagramme des étapes à suivre



Etape 0 : limite et signe de la suite.

Avant toute chose, il faut évaluer rapidement la limite du terme général. Deux possibilités :

- Si $a_n \not\rightarrow 0$, alors on peut directement conclure que la série $\sum a_n$ **diverge**, à condition de calculer proprement la limite du terme général.
- Si $a_n \rightarrow 0$, alors on ne peut rien dire (penser à $\sum \frac{1}{n}$), il va falloir travailler!

Il faut ensuite déterminer le signe des termes de la suite. À nouveau, deux possibilités :

- Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs, alors il faut le démontrer. On pourra alors utiliser toutes les techniques propres aux séries de terme général positif.
- Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de terme général quelconque, alors ça ne sert à rien de le dire. Là, il va falloir se poser un peu plus de questions.

Cas 1 : terme général positif

Dans le cas où les termes de la série sont tous positifs, on a beaucoup d'outils puissants à disposition. Cependant, pas la peine de se jeter tête baissée dans les calculs, il est toujours bien de regarder tranquillement le terme général pour déterminer quelle technique employer.

Technique 1 : critères de d'Alembert et de Cauchy

Ces deux techniques permettent de se ramener à l'étude de la limite d'une suite auxiliaire.

Théorème 1 (Critère de d'Alembert). Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

- Si $\ell < 1$, alors la série de terme général a_n **converge**.
- Si $\ell > 1$, alors la série de terme général a_n **diverge**.

⚠ ⚠ ⚠ Le critère ne dit **rien** dans le cas $\ell = 1$.

Exemple 2. Ce critère est utile pour les suites dont les quotients successifs sont faciles à estimer : les suites composées de factorielles, de puissances, sans trop de sommes parasites sont en générales de bonnes candidates.

Si $a_n = \frac{(3n-1)!}{(n+3)!(2n)!}$, on calcule rapidement que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+3)!}{(n+4)!} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(3n+2)!}{(3n-1)!} = \frac{(3n)(3n+1)(3n+2)}{(n+4)(2n+1)(2n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{27}{4} > 1.$$

Après ce simple calcul, le critère de d'Alembert permet de conclure que la série de terme général a_n **diverge**.

Théorème 3 (Critère de Cauchy). Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que la suite $\sqrt[n]{a_n}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(i) Si $\ell < 1$, alors la série de terme général a_n **converge**.

(ii) Si $\ell > 1$, alors la série de terme général a_n **diverge**.

⚠⚠⚠ Le critère ne dit **rien** dans le cas $\ell = 1$.

Exemple 4. Ce critère est utile pour les suites qui sont des puissances n -ièmes de suites bien connues ou faciles à étudier.

Si $a_n = \left(\frac{3n^2+1}{4n^2+n+1}\right)^n$, on calcule rapidement que

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{3n^2+1}{4n^2+n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} < 1.$$

Après ce simple calcul, le critère de Cauchy permet de conclure que la série de terme général a_n **converge**.

Technique 2 : comparaison aux séries connues

Séries de référence à connaître

Théorème 5 (Séries géométriques). Soit $q > 0$ un réel. La série de terme général q^n est

(i) **convergente** si $q < 1$,

(ii) **divergente** si $q \geq 1$.

Théorème 6 (Séries de Riemann). Soit $\alpha > 0$ un réel. La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est

(i) **divergente** si $\alpha \leq 1$,

(ii) **convergente** si $\alpha > 1$.

Théorèmes de comparaison

Théorème 7. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels **positifs**.

(i) Si $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$, alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature.

On suppose que $\sum b_n$ **converge**.

(ii) Si à partir d'un certain rang $a_n \leq b_n$, alors $\sum a_n$ converge,

(iii) Si $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(b_n)$, alors $\sum a_n$ converge.

On suppose que $\sum b_n$ **diverge**.

(iv) Si à partir d'un certain rang $b_n \leq a_n$, alors $\sum a_n$ diverge,

(v) Si $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(a_n)$, alors $\sum a_n$ diverge.

⚠⚠⚠ Ces critères ne s'appliquent que si les deux suites sont positives.

Exemple 8. On peut utiliser le point (i) si l'on sait ramener la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à un équivalent de la forme kq^n ou kn^α . Si $a_n = \frac{n^3 + \sqrt{n} + \ln n}{(2n^2+1)^3 + \ln(n^2+3n)}$, on a

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{8n^3},$$

donc la série de terme général a_n converge.

On peut également utiliser le point (iii) et montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un petit o d'un terme général convergent de Riemann en multipliant par un n^α adapté.

Si $a_n = \frac{n^2+3n+1}{(2n)!+3}$, on a

$$n^2 a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc la série de terme général a_n converge car $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Cas 2 : terme général de signe quelconque

Dans le cas où les termes de la série sont de signe quelconque, on a deux techniques principales.

Technique 1 : mettre des valeurs absolues

Dans la pratique, on essaye d'encadrer la suite par des valeurs absolues et regarder si la nouvelle série converge.

Théorème 9. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels quelconques. Si la série de terme général $|a_n|$ **converge**, alors la série de terme général a_n **converge**.

⚠⚠⚠ Si la série de terme général $|a_n|$ **diverge**, on ne peut rien dire.

Technique 2 : séries alternées

Si la suite est de la forme $(-1)^n a_n$, on dispose d'un critère efficace à vérifier.

Théorème 10. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels quelconques. Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à la fois

(i) *positive*,

(ii) *décroissante*,

(iii) *de limite nulle*,

alors la série $\sum (-1)^n a_n$ est **convergente**.

⚠⚠⚠ Il y a **trois** critères à vérifier impérativement : la positivité, la décroissance et la limite nulle.